

# 安徽师范大学

## 2020 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码： 895

科目名称： 概率论与数理统计

- 1、(15分) 假设三组事件 $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_n$ 是样本空间 $\Omega$ 的三个不同的划分(完备事件组), 若对任意的 $i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, n\}$ 都有 $P(A_i B_j C_k) > 0$ 。证明: 对概率存在的任意事件 $D \subset \Omega$ 都有

$$P(D) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n P(A_i)P(B_j|A_i)P(C_k|A_i B_j)P(D|A_i B_j C_k).$$

- 2、(20分) 设二维连续型随机变量 $(X, Y)$ 具有概率密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 < x, y < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求 $A$ 的值; (2) 求 $X, Y$ 的边缘概率密度函数; (3) 判断 $X, Y$ 是否独立?

- 3、(10分) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是相互独立且都来自于参数为 $\theta$ 的韦布尔分布

$$p(x) = mx^{m-1}\theta^{-m}e^{-(x/\theta)^m},$$

其中 $x > 0, \theta > 0$ , 且 $\theta$ 未知,  $m > 0$ 已知。试给出参数 $\theta$ 的一个充分统计量。

- 4、(15分) 设二维连续型随机变量 $(X, Y)$ 具有概率密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $X, Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}$ 。

- 5、(15分) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立, 其中连续型随机变量 $X$ 具有概率密度函数 $f(x)$ , 离散型随机变量 $Y$ 的分布律为 $P(Y = a_i) = p_i, i = 1, \dots, n$ 。证明:  $X + Y$ 有概率密度函数 $h(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(x - a_i)$ 。

6、(15 分) 设总体  $X \sim N(0, 4)$ , 从中抽取一个容量为 6 的样本  $X_1, \dots, X_6$ , 记

$$Y = C_1(X_1 + X_2)^2 + C_2(X_3 + X_4 + X_5 + X_6)^2,$$

试确定常数  $C_1, C_2$  使得  $Y$  服从卡方  $\chi^2$  分布, 并指出该卡方分布的自由度。

7、(15 分) 设  $(X_1, \dots, X_n)$  是来自双参数指数分布的一个容量为  $n$  的样本, 其概率密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta}, & x > \alpha, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \text{其中 } -\infty < \alpha < +\infty, 0 < \beta < +\infty \text{ 均未知。求}$$

参数  $\alpha$  和  $\beta$  的极大似然估计  $\hat{\alpha}$  和  $\hat{\beta}$ 。

8、(20 分) 设总体  $X$  的概率密度函数为  $p(x) = \begin{cases} 20x^3(\theta - x)/\theta^5, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  其中  $\theta > 0$

为未知参数。从中抽取一个容量为  $n$  的样本  $(X_1, \dots, X_n)$ , 求: (1)  $\theta$  的矩估计  $\hat{\theta}$ ; (2)

矩估计  $\hat{\theta}$  的方差  $Var(\hat{\theta})$ 。

9、(10 分) 电动机由于连续工作时间 (小时) 过长会烧坏, 今随机地从某种型号的电动机中抽取 16 台, 测试了它们在烧坏前连续工作的时间  $X$ , 得到样本均值  $\bar{x} = 39.7$ ,

样本标准差  $s = 2.65$ 。如果已知电动机工作时间  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 分别求  $\mu$  和  $\sigma$  的 95% 的

置信区间。

置信区间。

10、(15 分) 假设机器甲和乙都生产塑钢管, 要检验甲和乙生产的塑钢管内径长度是否

有差异。设它们生产塑钢管内径分别为  $X$  和  $Y$ , 其中  $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$  和  $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ,

且相互独立。现从机器甲和乙生产的塑钢管中分别抽取 20 根和 22 根, 分别测得样

本方差  $\bar{x} = 20$ ,  $\bar{y} = 12$ ,  $s_X^2 = 0.29$ ,  $s_Y^2 = 0.34$ , 试问能否认为两台机器生产的塑钢

管内径长度没有差异 (取  $\alpha = 0.05$ ) ?

备注: 几个供参考的上分位数的值:

$$(1) t \text{ 分布: } t_{0.025}(40) = 2.02, t_{0.025}(42) = 2.018, t_{0.05}(40) = 1.684, t_{0.05}(42) = 1.682.$$

$$t_{0.025}(14) = 2.14, t_{0.025}(15) = 2.13, t_{0.05}(14) = 1.761, t_{0.05}(15) = 1.753.$$

$$(2) \chi^2 \text{ 分布: } \chi_{0.025}^2(14) = 26.1, \chi_{0.975}^2(14) = 5.63, \chi_{0.025}^2(15) = 27.5, \chi_{0.975}^2(15) = 6.26.$$