安徽师范大学

2020 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码： 891

科目名称： 高等代数

一、(15 分) 设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 是数域 P 上的多项式. 证明：$f(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 互素的充分必要条件是 $\left(f(x),h(x)\right)=\left(f(x),g(x)\right)=1$.

二、(15 分) 设 m 是整数，证明：x^4-mx^2+1 在有理数域上可约的充分必要条件是存在整数 k 使得 $m=k^2-2$ 或 $m=k^2+2$.

三、(15 分) 设 a,b 是两个不同的实数，计算 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ab & a+b \end{vmatrix}.$$

四、(20 分) 设 γ_0 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$（β 为非零向量）的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是其导出组 $AX=0$ 的一个基础解系，证明：

1、$\gamma_0,\beta_1=\gamma_0-\eta_1,\beta_2=\gamma_0-\eta_2,\cdots,\beta_t=\gamma_0-\eta_t$ 是线性方程组 $AX=\beta$ 的一组线性无关的解.

2、线性方程组 $AX=\beta$ 的任一解都可以表示为
$$k_0\gamma_0+k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_t\beta_t，\text{其中 } k_1+k_2+\cdots+k_t=1-k_0.$$

五、(15 分) 设 A 为 n 阶方阵，$n\geq 3$，A^* 为 A 的伴随矩阵. 证明：

1、若 $|A|=0$，则 $r\left(A^*\right)\leq 1$；

2、$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$ 且 $\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$.

考生请注意：答案必须写在答题纸上，写在本试题纸上的无效！

六、(20分) 设V是数域P上的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$是$V$的一组基，$f$是$V$的一个线性变换，且

$$f(\varepsilon_1)=\varepsilon_3,f(\varepsilon_2)=\varepsilon_4,f(\varepsilon_3)=f(\varepsilon_4)=0.$$

1、写出f在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的矩阵；

2、求出f的值域$f(V)$的维数及一组基；

3、判断$f(V)\cup f^{-1}(0)$是否为V的一个线性子空间？并说明理由.

七、(20分) 设A为3阶实对称矩阵，行列式$|A-3E|=0$，向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$是线性方程组$Ax=0$的两个解.

1、求正交矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵；

2、求矩阵A及行列式$\left|\left(A+A^*-2E\right)^{1010}\right|$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$为3阶单位阵.

八、(15分) 设A、C是n阶正定矩阵，实矩阵B是矩阵方程$AX+XA=C$的唯一解，证明：

1、B是正定矩阵；

2、存在n个线性无关的n维行向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得$B=\alpha_1{}^T\alpha_1+\alpha_2{}^T\alpha_2+\cdots+\alpha_n{}^T\alpha_n$，其中$\alpha_i{}^T$表示$\alpha_i$的转置,$i=1,\cdots,n$.

九、(15分) 设J为一个k级若尔当(Jordan)块.证明：

1、存在k级幂零矩阵P（即存在正整数s使得$P^s=0$）及对角矩阵U,使得$J=P+U$；

2、任一n阶复方阵A都可以分解成为$A=B+C$，其中B是幂零矩阵，C相似于对角矩阵，且$BC=CB$.