科目代码： 760 科目名称:数学分析

适合专业： 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论 总 2 页 第 1 页

注意：考生须使用报考点提供的答题纸。所有试题答案必须标明题号，按序写在答题纸上，写在本试卷上或草稿纸上者一律不给分。

以下是试题内容：

一、（本题 15 分）设 a_1, b_1 是两个正数，且 $a_1 < b_1$. 令

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \geq 1.$$

证明数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的极限都存在，且相等.

二、（本题 15 分）求极限 $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{\frac{\cos x}{y}}}{(1+\frac{x}{y})^y} dx$.

三、（本题 15 分）证明函数 $f(x) = x^2$ 在 $[a, b]$ 上一致连续，但在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

四、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上二次可微，且 $f(0) = -1$，$f'(0) > 0$，
min
又 $x > 0$ 时，$f''(x) > 0$，证明方程 $f(x) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 内有且只有一根.

五、（本题 15 分）设函数 $f(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{|t|} \ln|t| dt$，求导数 $f'(x)$.

六、（本题 15 分）证明若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 也绝对收敛.

七、（本题 15 分）证明函数 $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$ （a, b 为常数）满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

八、（本题 15 分）证明对任意常数 r，θ，球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2\tan\theta$ 是正交的.

九、（本题 15 分）设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且

$$f(t)=1+\iint_D f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4t^2\right\}$，求 $f(t)$.

十、（本题 15 分）设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中函数 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(0)=0$，求 $\varphi(x)$ 并计算

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy.$$