科目代码：870　科目名称：高等代数

适合专业：基础数学，计算数学，应用数学，运筹学与控制论　　

注意：考生须使用报考点提供的答题纸。所有试题答案必须标明题号，按序写在答题纸上，写在本试卷上或草稿纸上者一律不给分。

一．（15 分）计算 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$ $=(a+b)\cdots(a+b)$

二．（15 分）求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，其中

$$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1,$$
$$g(x)=x^3+x^2-x-1.$$

三．（15 分）k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$$

有（1）唯一解；（2）无解；（3）无穷多组解．并在有解时，写出其全部解．

四．（15 分）设 R^3 的两组基为 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$ 和

4 2 2　3 3 3

$\beta_1=(0,1,1)^T$，$\beta_2=(-1,1,0)^T$，$\beta_3=(1,2,1)^T$．求向量 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3$ 在基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 下的坐标．

$=(2,-1,-2)^T$

五．（20 分）设 ε 是 n 维欧氏空间 V 的一个单位向量，定义变换 T 为：

$$T\alpha=\alpha-2(\alpha,\varepsilon)\varepsilon,\alpha\in V,$$

证明：T 是正交变换．

六．（20 分）设 A 是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明：$|A^*|=|A|^{n-1}$.

七．（20 分）设 M_1, M_2 是线性空间 V 的两个有限维子空间，

证明：$\dim(M_1+M_2)=\dim M_1+\dim M_2-\dim(M_1\cap M_2)$.

八．（10 分）设 A 是 n 阶方阵，ξ 是 n 维列向量，k 是正整数，且 $A^k\xi=0$，但 $A^{k-1}\xi\neq0$. 证明向量组 $\xi,\ A\xi,A^2\xi,\cdots,A^{k-1}\xi$ 线性无关.

九．（20 分）证明：(1) 任何实对称矩阵都可正交相似对角化.

(2) 任何实二次型 $f=X^TAX$，都存在正交矩阵 P，使得当 $X=PY$ 时，

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.