西安建筑科技大学

2019 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 1 页

考试科目: （620）数学分析

适用专业: 数学

一、计算题（共 6 题，每题 10 分，共 60 分）

1、求函数极限或已知极限确定参数。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$，

（2）设 a,b 为实数，确定 a,b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=3$.

2、设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在惟一正实根 x_n，并证明当 $a>1$ 时，数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^a$ 收敛。

3、设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2xy-x^2+18=0$ 确定的隐函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

4、求曲面积分 $\oiint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=h$ （h 是正常数）所围空间区域 $(0\le z\le h)$ 的表面，方向取外侧。

5、求圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被圆锥面 $z^2=4(x^2+y^2)$ 所截得的有界部分立体 Ω 的体积。

6、设 $f(x)$ 为二阶可导函数，$F(x)$ 为可微函数，a 为正常数，二元函数 $u=u(x,t)$ 如下定义

$u(x,t)=\dfrac{1}{2}(f(x-at)+f(x+at))+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(v)dv$. 求偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

二、证明题（共 6 题，每题 15 分，共 90 分）

7、设 $a>0,\ \sigma>0,\ a_1=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{\sigma}{a}),\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n})$，$n=1,2,\cdots$， 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

8、设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=0$。试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

9、设可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，

（1）求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)\cdot\int_0^1 x^{3n}f(x)\,dx=f(1)$；

（2）利用导数定义证明函数 $F(x)=\int_0^{3x}f(t)\,dt$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可导函数，且 $F'(x)=3f(3x)$.

10、若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在开区间 $(0,a)$ 内可导，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的右极限存在，求证：右导数 $f'_+(0)$ 的存在。

11、求证：（1）函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{x^n}{x^n+1}\right)$ 在开区间 $(0,\ +\infty)$ 内一致收敛；

（2）函数 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x te^t dt}{\int_0^x e^t dt}$ 为开区间 $(0,\ +\infty)$ 上的增函数。

12、已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，L 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin x}dy-ye^{\sin y}dx$；

（2）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.