青 岛 科 技 大 学

二〇一七年硕士研究生入学考试试题 1

考试科目：高等代数

注意事项：1．本试卷共 10 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

* *

一、（15 分）证明：如果 $(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$，那么 $(f(x),g(x)h(x))=1$。

二、（15 分）计算 n 阶行列式的值（其中 $a_i\neq 0,i=1,2,...,n$）：

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

三、（15 分）给定线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases}$，讨论当 a 取何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时求出通解.

四、（15 分）求实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩、正惯性指数和负惯性指数。

五、（20 分） 证明：如果 A 是 $n\times n$ 矩阵 $(n\geq 2)$，那么

$$rank(A^*)=\begin{cases} n, & 当 rank(A)=n \\ 1, & 当 rank(A)=n-1 \\ 0, & 当 rank(A)<n-1 \end{cases}。$$

六、（20 分）设 A 是数域 P 上 6 阶矩阵，行列式因子为： $D_6(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3)$,

$D_5(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2), D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=D_4(\lambda)=1$。

（1） 求 A 的所有不变因子；

（2） 写出 A 的 $Jordan$ 标准形。

七、（25 分）设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换，若有 $\alpha\in V$ 使得 $\sigma^{k-1}(\alpha)\neq 0$，但 $\sigma^{k}(\alpha)=0$，这里 $k=\dim V$。证明：

（1）$\alpha,\sigma(\alpha),\ldots,\sigma^{k-1}(\alpha)$ 线性无关；

（2）存在 V 的一组基，使得 σ 在该组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k\times k}$。

八、（25 分）设 V 是复数域上的 n 维线性空间，σ 和 τ 是 V 上的线性变换。

（1）证明 $\sigma(V)\subset\sigma^{-1}(0)$ 当且仅当 $\sigma^{2}=0$。

（2）若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，证明：如果 λ_0 是 σ 的一个特征值，那么 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间；并且 σ 和 τ 至少有一个公共的特征向量。