西 安 建 筑 科 技 大 学

2020 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 3 页

考试科目: （621）高等数学与线性代数

一、单项选择题（共 5 题，每题 5 分，共 25 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}=$ 【 】

（A）$2f''(a)$ （B）$\dfrac{1}{2}f''(a)$

（C）$f''(a)$ （D）$-f''(a)$

2. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\tan x-\sin x$ 是 x 的 【 】

（A）一阶无穷小 （B）二阶无穷小 （C）三阶无穷小 （D）等价无穷小

3. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^1 f(tx)dt=x,$ 则 $f(x)=$ 【 】

（A）x^2 （B）$2x^2$ （C）$\dfrac{1}{2}x$ （D）$2x$

4. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为非零向量，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 【 】

（A）$\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ （B）$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ （C）$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ （D）$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

5. A 是 n 阶正交矩阵, 则下列结论不正确的是 【 】

（A）$A^2=A$ （B）$|A|=\pm 1$ （C）A^{-1} 也是正交矩阵

（D）A 的列向量组必是 R^n 的一个标准正交基

二、填空题（共 5 题，每题 5 分，共 25 分）

6. 设 $f(x)=(x^3+1)(x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\dfrac{1}{7!}x^7)$，则 $f^{(8)}(0)=$________.

7. 设 $f(x)$ 可导，$y=f(\sin x)+e^{f(x)}$，则 $dy=$ __________.

8. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\tan x}{x}$，则 $f(x)=$__________.

9. 曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(0\le x\le 1)$ 的弧长 $s=$__________.

10. 已知 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|3A^2A^*|=$__________.

三、解答题与证明题（共 10 题，每题 10 分，共 100 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

12. 试确定常数 a,b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x \dfrac{\ln\left(1+\tan t^3\right)}{t}dt}=b\ne 0$.

13. 已知 $\begin{cases} x=\theta(1-\sin\theta) \\ y=\theta\cos\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi}$.

14. 设 $f(x)$ 为可微函数，$f(0)=2$，且曲线积分 $\int_L yf(x)dx+[f(x)-2e^{-x}]dy$ 与路径无关，(1) 求 $f(x)$；（2）将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数.

15. 设 $f(x)=\ln x+\int_1^e f(x)dx$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

16. λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$ 有唯一解, 无解或无穷多解?有无穷多解时求出通解.

17. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 证明向量组 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots$, $\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$ 也线性无关.

18. 设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t\left(x-t\right)\right|dt$, $\left(0<x<1\right)$. 试求:

（1） $f(x)$ 的单调区间与极值点;（2） $f(x)$ 的凹凸区间与拐点.

19. 设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上具有二阶导数，且 $f\left(a\right)=f(b)=0, f_+'\left(a\right)\cdot f_-'(b)>0$，证明:（1）存在 $\xi\in\left(a,b\right)$，使得 $f\left(\xi\right)=0$；（2）存在 $\eta\in\left(a,b\right)$，使得 $f''\left(\eta\right)=0$.

20. 已知

$$P(x,y,z)=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q(x,y,z)=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R(x,y,z)=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

（1）当 $x^2+y^2+z^2\neq0$ 时，求 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$；

（2）计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}Pydz+Qdzdx+Rdxdy$ ，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.