

西安建筑科技大学

2020年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共2页

考试科目: _____ (818) 高等代数 _____

一、填空题 (共6题, 每题5分, 共30分)

1. 设 x_1, x_2, x_3 为 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ 的根, 则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$ _____。
2. 多项式 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx + 1$ 有重根, 则 $k =$ _____。
3. 已知矩阵 $A_{4 \times 4}$, $|A| = -1$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $|(2A)^{-1} - \frac{3}{2}A^*| =$ _____。
4. 已知 $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = x, \varepsilon_3 = x^2$ 和 $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1 - x, \eta_3 = (1 + x)^2$ 是线性空间 $P_3[x]$ 两组基, 则由基 η_1, η_2, η_3 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 _____。
5. 设 $f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$, 则 f 的正惯性指数为 _____。
6. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$ (其中 $a > 0$), 通过正交变换化成标准型为 $f = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$, 则参数 $a =$ _____。

二、(15分) 求向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (0, 2, 2, 4)^T, \alpha_4 = (1, -1, 2, -2)^T, \alpha_5 = (1, 3, -4, 6)^T$ 的一个极大线性无关组和秩, 并把其余向量用极大无关组线性表示。

三、(15分) 已知实方阵 A 满足 $A^2 - A + 2E = 0$, 其中 E 为单位矩阵。

- (1) 证明 $A + 2E$ 可逆并求出其逆矩阵; (2) 证明对任意实数 a , $A + aE$ 都是可逆矩阵。

四、(15分) 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$

五、(20分) 设有三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

- (1) 记 $X = (x_1, x_2, x_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 求正交变换 $X = PY$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;
(2) 问 a 为何值时, f 正定?

六、(15分) 证明 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, 而 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, 举例说明“如果 a 是 $f'(x)$ 的 m 重根, 那么 a 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根”是不对的。

七、(15分) 考虑 $P_n[x]$ 上的线性变换

$$D: f(x) \mapsto f'(x), \quad A: f(x) \mapsto f(x+1)$$

若它们在基底下 $(1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!})$ 的矩阵分别为 D, A , 证明:

$$(1) D^n = O \quad (2) A = E + D + \frac{D^2}{2!} + \cdots + \frac{D^{n-1}}{(n-1)!}$$

八、(10分) 证明: 如果 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个正交变换, 那么 σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间。

九、(15分) 设 V 是实数域 P 上全体 n 阶方阵在通常的运算下构成的线性空间, σ 为 V 上的线性变换,

且对任意的 $A \in V, \sigma(A) = A^T$

- (1) 求 σ 的特征值; (2) 对每一个特征值, 求其对应的特征子空间;
(3) 证明 V 恰是 σ 的所有特征子空间的直和。