

扬州大学

2020年硕士研究生招生考试初试试题 (A卷)

科目代码 601 科目名称 数学分析 满分 150

注意: ① 认真阅读答题纸上的注意事项; ② 所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③ 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、计算题 (共 50 分, 每题 10 分。要求有过程。)

1、求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^{2020}} + \cdots + \frac{1}{n^{2020}}}$ 。

2、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x)]$ 。

3、设 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 y', y'' 。

4、利用公式 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ 求积分 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx$ 。

5、求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数。

二、论述题 (共 30 分, 每题 6 分。要求: 先判断, 然后正确的给出证明,

错误的给出反例。)

1、若数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \geq 2$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

2、若函数 f 在 x_0 处左右可导, 则 f 在 x_0 处连续。

3、若 f 为 R 上的有界可导凸函数, 则 f 必为常值函数。

4、若函数 f 在 $[a, b]$ 上可导, 则其导函数 f' 在 $[a, b]$ 上可积。

5、若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛。

三、综合题（共 70 分，每题 10 分。要求有过程。）

1、用 $\varepsilon-N$ 定义验证： $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ 。

2、设迭代数列 $\{x_n\}$ 由下式定义：

$$x_1 \in (0, \pi), \quad x_{n+1} = \sin x_n \quad (n \geq 1),$$

求证：1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ ；2) 利用 Stolz 公式求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^2$ 。

3、设函数 f 为 R 上的连续周期函数，求证： f 在 R 上一致连续。并以此证明：

$\sin x^2$ 不是周期函数。

4、设函数 f 在 $(0, +\infty)$ 内二次可导， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ，举例说明此时 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 未必成立。

并证明：若还存在 $M > 0$ ，使得 $|f''(x)| \leq M, \forall x > 0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。

5、设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积，求证：Schwarz 不等式成立

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx。$$

6、1) 求证： e 为无理数；2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n |\sin(\pi en!)|$ 。

7、设函数 f 在 R 上有界，可导且 $|f'(x)| < 1, \forall x \in R$ ，数列 $\{x_n\}$ 由下式定义：

$$x_1 \in R, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 1,$$

求证： $\{x_n\}$ 收敛。