机密★启用前

四川轻化工大学2020年研究生招生考试业务课试卷

（满分：150分，所有答案一律写在答题纸上）

适用专业：0701 数学

考试科目：601 数学分析 A 卷

考试时间：3 小时

一、填空题（本题满分 50 分，每小题 5 分）

1．曲线 $y=e^x$ 上的一点的切线过点 $(0,0)$，则此切线方程为____________________.

2．设 $f(\sin x)=\cos 2x$，则 $\int f(x)dx=$____________________.

3．设 $f(x)=x^2+x\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$____________________.

4．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{\sqrt[3]{1-\cos x^3}}=$____________________.

5．设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=e^k$，则 $k=$_______________.

6．设 $u_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lambda$，则 λ 满足：____________时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

7．设函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有梯度，则 $grad\, f(P_0)=$____________________.

8．若 $f(x,y)$ 可微，设 $z=f(x,xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________________.

9．一质点受力 $\mathbf{F}(x,y,z)=\big(P(x,y),Q(x,y),R(x,y,z)\big)$ 的作用，沿空间曲线 L 从点 A 移到点 B，则力 $\mathbf{F}$ 所作的功可用线积分表为 $W=$____________________.

10．Γ 函数的递推公式：$\Gamma(s+1)=$____________________.

二、（本题满分 12 分）将三次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$ 分别在柱面坐标系、球面坐标系下化为一个三次积分.

三、（本题满分 15 分）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n+1)}{3^n}$的和.

四、（本题满分 15 分）求出椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限中的切平面与三个坐标平面所围成四面体的最小体积.

五、（本题满分 12 分）设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个正实数，$f(x)=\left(\frac{a_1^{\,x}+a_2^{\,x}+\cdots+a_n^{\,x}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，证明：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

六、（本题满分 14 分）证明：对任意实数α，下列等式成立.

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot^{\alpha}x}dx$，

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}dx=\frac{\pi}{4}$.

七、（本题满分 16 分）设函数$f(x)$在区间(a,b)上可导，导函数有界，证明：

（1）函数$f(x)$在(a,b)上一致连续，

（2）函数$f(x)$在(a,b)上有界.

八、（本题满分 16 分）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(1)=0$，证明：

（1）$\{x^n\}$在$[0,1]$上不一致收敛，

（2）$\{x^n f(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛.