2020年硕士研究生招生考试（初试）试题

科目代码：601　　　　科目名称：高等数学

说明：1.本试题为招生单位自命题科目。

2.所有答案必须写在答题纸上，写在本试题单上的一律无效。

3.考生答题时不必抄题，但必须写明题号。

4.本试题共计 4 大题，满分 150 分。

一、　单项选择题（共 60 分，每小题 5 分）：

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, x\neq 0\\ 1, \qquad x=0\end{cases}$，则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的（　　）

A．连续点　　B．可去间断点　　C．跳跃间断点　　D．无穷间断点

2. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t dt,\ g(x)=\ln^3(1+x)$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）

A．等价无穷小　　B．低阶无穷小　　C．高阶无穷小　　D．同阶但非等价无穷小

3. 关于函数 $y=x^4$ 下列说法正确的是（　　）

A．$(0,0)$ 是拐点　　B．该函数的图形是（上）凹的

C．函数无极值点　　D．函数为单调增函数

4. 曲线 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为（　　）

A．$x+2y=0$　　B．$2x-y=0$　　C．$2x+y=0$　　D．$x-2y=0$

5. 若 $\int f'(e^{-x})dx=e^{-x}+C$，$f(x)=$（　　）

A．$-\dfrac{x^2}{2}+C$　　B．$\dfrac{x^2}{2}+C$　　C．$-e^{x}+C$　　D．$-e^{-x}+C$

6. 函数 $y=\int_0^x (x-t)f'(t)dt$，则 $y'(1)=$（　　）

A．$f'(0)-f'(1)$　　B．$f'(1)-f(0)$　　C．$f(1)-f(0)$　　D．$f(0)-f(1)$

7. 下列选项中经过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面是（　　）

A. $16x+14y-11z-65=0$　　B. $16x+14y+11z+1=0$

C. $16x-14y-11z-65=0$　　D. $16x-14y+11z+1=0$

8. 二元函数 $u=x^2e^{2y}$ 在 $(1,0)$ 处方向导数最大的方向是（　　）

A. $(2,1)$　　B. $(1,1)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(1,2)$

9. 下列曲线积分中与积分路径 L 无关的是（　　）

A. $\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$；　　B. $\int_L (6xy^2-y^3)dx+(6xy^2-3x^2y)dy$

C. $\int_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$　　D. $\int_L (2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

10. 下列级数中条件收敛的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin n\theta}{n^2-1}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{10^n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

11. 下列方程为二阶线性非齐次方程的是（　　）

A. $x^2y''-2xy'=3y$　　B. $x^2y''-2xy'-3y=4xe^x$

C. $y''-2yy'-3y=4xe^x$　　D. $y''-2yy'-3y=0$

12. 下列选项中是四阶微分方程 $tx^{(4)}-x^{(3)}=0$ 通解的是（　　）

A. $c_1t^4+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5$　　B. $c_1t^4+c_2t^3+c_3t^2+c_4t$

C. $c_1t^4+c_2t^2+c_3t+c_4$　　D. $c_1t^4+c_2t^3+c_3t+c_4$

二、　填空题（共 30 分，每小题 5 分）：

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+6}\right)^{x-1}=$ ________。

14. 若 $y=x^2e^x$，则 $y^{(20)}(0)=$ ________。

15. $I=\int\sin(\ln x)dx=$ ________。

16. 三元函数 $u=x^{\frac{y}{z}}$ 在 $(e,1,1)$ 处的全微分为________。

17. 设区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\right\}$，则二重积分 $\iint_D (x\cos y+y^2\sin\dfrac{1}{x}+1)dxdy=$ ________。

18. 一阶微分方程 $xt\dfrac{dx}{dt}=x^2+t^2$ 满足初始条件 $x(1)=2$ 的解为______________。

三、　计算题（6 小题，共 45 分）：

19. （7 分）求曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与横轴围成图形的面积。

20. （7 分）求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=14\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在 $(1,-3,2)$ 处的切线与法平面方程。

21. （7 分）设二元函数 $f(x,y)$ 在闭域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x\right\}$ 上连续，且有：

$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{4}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$， 试求 $f(x,y)$ 的表达式。

22. （8 分）计算第二类曲面积分 $I=\iint_\Sigma(2x^2z+x)dydz-2xyzdzdx-xz^2dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=2-x^2-y^2(1\le z\le 2)$，取上侧。

23. （8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$，并由此计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}$。

24. （8 分）求解二阶微分方程 $y''-2y'-3y=e^{3x}-4e^x$。

四、　证明题（共 15 分，共 2 小题）：

25. （7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明必存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

26. （8 分）证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin n\theta}{n^4}+(-1)^n\dfrac{n^2}{e^n}\right]$ 绝对收敛，其中 θ 为常数。