

扬州大学

2020 年硕士研究生招生考试初试试题 (A 卷)

科目代码 **833** 科目名称 **高等代数 (工)**

满分 **150**

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、(15分) 计算下列 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

二、(20分) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* , 证明:

(1) (6分) 若 $|A|=0$, 则 $|A^*|=0$;

(2) (6分) $|A^*|=|A|^{n-1}$;

(3) (8分) $\text{秩}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当秩}(A)=n \\ 1, & \text{当秩}(A)=n-1 \\ 0, & \text{当秩}(A)<n-1 \end{cases} \quad (n \geq 2).$

三、(20分) A 是 2 阶矩阵, 2 维列向量 α_1, α_2 线性无关, $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $A\alpha_2 = 4\alpha_1 + \alpha_2$, 求 A 的特征值和 $|A|$ 。

四、(25分) 已知 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$, a 是一个实数。

(1) (20分) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵;

(2) (5分) 计算行列式 $|A-E|$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵。

五、(15分) 已知 n 阶矩阵 A 满足: $A^3 = E$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵。

(1) (8分) 证明 $A^2 - 2A - 3E$ 可逆;

(2) (7分) 证明 $A^2 + A + 2E$ 可逆。

六、(15分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 又 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$, 证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

七、(25分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$, $B = [b_1, b_2] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{bmatrix}$, 求

- (1) (10分) a 为何值时, 方程组 $AX = B$ 有唯一解;
- (2) (5分) a 为何值时, 方程组 $AX = B$ 无解;
- (3) (10分) a 为何值时, 方程组 $AX = B$ 有无穷多解? 并求出有无穷多组解时的通解。

八、(15分) 设 A 为 3 阶对称矩阵, A 的秩 $R(A) = 2$, 且满足条件 $A^3 + 3A^2 = O$,

- (1) (8分) 求 A 的全部特征值;
- (2) (7分) 当 k 为何值时, $A - kE$ 为正定矩阵, 其中 O 是零矩阵, E 是 3 阶单位矩阵。