

扬州大学

2020 年硕士研究生招生考试初试试题 (A 卷)

科目代码 **644** 科目名称 **高等数学 (农)**

满分 150

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 40 分)

1. 设 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + (x+1)\sqrt{1-2x}$, $f'(0) = (\quad)$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{5}{2}$

2. 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = (\quad)$

- (A) 2 (B) $2(1+t^2)$ (C) $2t(1+t^2)$ (D) $-\frac{4t^3}{1+t^2}$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ a+bx, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 则 a, b 的值分别为 (\quad)

- (A) 2, 1 (B) 2, -1 (C) 1, -2 (D) -1, 2

4. 曲线 $y = \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3$ 在拐点处的切线的方程为 (\quad)

- (A) $9x+2y+3=0$ (B) $9x+2y-3=0$
(C) $9x+2y+15=0$ (D) $9x-2y+15=0$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{2t}-1)dt}{\sin^2 x} = (\quad)$

- (A) ∞ (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

6. 下列反常积分中收敛的是 (\quad)

- (A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx$ (B) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$ (C) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ (D) $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

7. $\int_0^{\pi} x |\sin 2x| dx = (\quad)$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}\pi$ (C) $\frac{3}{4}\pi$ (D) π

8. 设 $z = (x-y)f(x-y)$, 其中 $f(u)$ 可导, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

- (A) $(x-y)f'$ (B) $(x+y)f'$ (C) $(x-y)f + (x^2 - y^2)f'$ (D) $(x-y)f + (x-y)^2 f'$

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, A 的伴随矩阵记为 A^* , 则 A^* 的特征值为 (\quad)

- (A) 1, 2, 2 (B) 1, 2, 4 (C) 2, 2, 4 (D) 2, 4, 4

10. 设变量 X 在 4, 5, 6 中随机取值, 变量 Y 在 1, 2, ..., X 中随机取值, 则 $P\{Y=2\} = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{X}$ (B) $\frac{37}{180}$ (C) $\frac{37}{60}$ (D) $\frac{1}{15}$

二. (10分) 求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} \right]$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n-3)(n+1)} - n \right]$.

三. (11分) 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 - y^3 - 3x - 3y + 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

四. (11分) (1) 证明: 当 $x > 0$ 时, 有 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;

(2) 证明: 对任意正整数 n , 有 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0$.

五. (11分) 求 $\int \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{4-x^2} \right) dx$.

六. (11分) 曲线 $y = x^2$ ($x \geq 0$)、直线 $y = 2 - x$ 及 y 轴所围成的图形记为 D ,

(1) 求 D 的面积 A ; (2) 求 D 绕 x 轴旋转一周而成立体的体积 V_1 ;

(3) 求 D 绕直线 $x = -1$ 旋转一周而成立体的体积 V_2 .

七. (14分) (1) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, 讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性;

(2) 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 记 $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_2$, $\gamma_2 = \beta_2 - \beta_3$, $\gamma_3 = \beta_1 + k\beta_3$, 其中 k 是任意常数, 讨论向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 的线性相关性.

八. (14分) 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) $a=1$ 时, 求方程组的全部解.

(2) $a \neq 1$ 时, 方程组是否有解? 方程组有解时, 求出方程组的解.

九. (14分) 箱子中共有 6 个产品, 其中 2 个是次品, 4 个是正品.

(1) 无放回抽取, 每次抽 1 个, 共抽 3 个, 抽到次品个数记为 X , 求数学期望 $E(X)$ 、 $E(2X-1)$;

(2) 有放回抽取, 每次抽 1 个, 共抽 3 个, 抽到次品个数记为 Y , 求方差 $D(Y)$ 、 $D(3Y+1)$.

十. (14分) 设随机变量 X 的概率密度为
$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X \geq 2\}$;

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(3) 设 $Y = X^2$, 求 Y 的分布函数 $G(y)$;

(4) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

