扬州大学

2020年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 840　　**科目名称** 数学分析与高等代数综合　　　　**满分** 150

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

（数学分析部分）

1. （10分）求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

2. （10分）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)^{n}}.$$

3. （10分）设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续，在 $(0,4)$ 内可导，且 $f(0)=2$，

$f(2)=1$，$f(4)=3$，证明存在 $\xi\in(0,4)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

4. （15分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ 的收敛域、和函数并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

5. （15分）设 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上且满足：

$|f(x')-f(x'')|\le|\arctan x'-\arctan x''|, x',x''\in[0,1]$. 证明

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积；

(2) 若 $f(1)=0$，则 $\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\dfrac{1}{2}\ln 2$.

6. （15分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且存在常数 $M>0$

使得 $|xf'(x)-f(x)|\le Mx^2, x\in(0,1)$. 试证：

（1）$\dfrac{f(x)}{x}$ 在内一致连续，且 $f(0)=0$；

（2）$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在.

（高等代数部分）

7.（15分）设A为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3个线性无关的列向量，满足：

$$A\alpha_1=-\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3,$$

（1）证明：A是可逆方阵；　（2）求$|3A-4E_3|$　（这里E_3是3阶单位矩阵）.

8.（15分）设A,B,C为一个直角三角形的三个内角，

(1) 设$G=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&3\\-1&1&4\end{pmatrix}$，写出二次型$f(x,y,z)=(x\ y\ z)G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$的矩阵；

(2)证明：对任意实数x,y,z，有$x^2+y^2+z^2\geq 2xy\cos A+2xz\cos B+2yz\cos C$.

9.（15分）设$A=\begin{pmatrix}-4&-10&0\\1&3&0\\3&6&1\end{pmatrix}$，(1)求$A$的全体特征值及特征向量；(2)求$A^{100}$.

10.（15分）(1)设A是$m\times n$实矩阵，证明齐次线性方程组$AX=0$与$A^TAX=0$同解；

(2)若$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，求满足$AX=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$的全体矩阵$X$.

11.（15分）设A,B,C是n阶复方阵，满足$A=A^2B=CA^2$，证明：

(1) $AB=CA$；　(2) 证明存在n阶复方阵D，满足$A=ADA,D=DAD,AD=DA$.