

机密★启用前

四川轻化工大学 2020 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 808 高等代数 A 卷

考试时间: 3 小时

一、填空题 (每题 5 分, 共 30 分)

1、 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 m , 则排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_1$ 的逆序数为_____。

2、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ _____ (其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式)。

3、设方阵 A_n, B_n 均可逆, 且 $|A| = a, |B| = b$, 则 $\frac{\begin{vmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (A \ 0)^* \\ (0 \ B) \end{vmatrix}} =$ _____。

4、已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$ 是正定二次型, 则参数 λ 的取值范围为_____。

5、已知 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ($\sigma_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$), 则 $|A^{-1}| =$ _____。

6、线性空间 \mathbb{R}^4 中, 内积定义为 $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3 + 4a_4 b_4$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$, 则当 $k =$ _____ 时, 向量 $(2, 0, 1, 3)^T$ 与向量 $(1, -2, 1, k)^T$ 正交。其中 α^T 表示向量 α 的转置。

二、计算题 (共 84 分)

1、(14 分) 设 4 阶方阵 A, B, C 满足方程 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 试求矩阵 A ,

$$\text{其中 } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2、(12 分) 设 α 为三维列向量, 且 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 计算 $\alpha^T\alpha$ 。

3、(14 分) $V = \{A \in P^{n \times n} \mid \text{tr}(A) = 0\}$ (其中 $\text{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹) 对于矩阵的加法和数乘构成 P 上的线性空间, 试求 V 的维数和一组基。

4、(14 分) 讨论 a 取不同的值时, 线性方程组 $\begin{cases} x + y + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ 的解的情况, 有解时求出它的全部解。

5、(15 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + Cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2,

(1) 求参数 C 及此二次型对应的矩阵的特征值;

(2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面。

6、(15 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 x, y 满足什么条件时 A 与对角阵相似。

三、证明题 (共 36 分)

1、(18 分) 已知 A, B, C, D 为 n 阶方阵, $AC = CA, AD = CB, |A| \neq 0$, 若 $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,

证明:

$$n \leq \text{rank}(G) < 2n$$

2、(18 分) 设 α 是欧氏空间 V 的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$ 满足条件

$$(\alpha_i, \alpha) > 0, \quad (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j)$$

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关。