中国计量大学

2021年硕士研究生招生考试试题

考试科目代码：713　　　　　　考试科目名称：数学分析

所有答案必须写在报考点提供的答题纸上，答在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题（每小题8分，共64分）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le x_0, \\ ax+b, & x>x_0 \end{cases}$ 在 x_0 可导，则 $a=$____，$b=$____；

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$____________；

3. 试问 $a=$____时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，它是____________值（填“极大”或“极小”）；

4. 积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=$____________；

5. 曲线 $ye^{xy}-x+1=0$ 在 $(0,-1)$ 处的切线方程是____________；

6. 设函数 $u=F(x,y)$ 可微，而 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=$____________；

7. 设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域，则积分

$\iiint_{\Omega} z\,dxdydz=$____________；

8. 设 L 为由直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 所围区域的整个边界，则积分

$\int_L x\,ds=$____________.

二、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$；

2. 求不定积分 $\int (x+\ln x)^2 dx$；

3. 设函数 $f(x)$ 连续，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[te^t\int_{t^2}^0 f(\theta)d\theta\right]dt}{x^3e^x}$；

4. 计算重积分 $\iint_D \sqrt{\left|y-x^2\right|}\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le 1,\ 0\le y\le 2\right\}$；

5. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ 的收敛域及和函数；

6. 设 C 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 自 $(0,\ 0)$ 到 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 的弧段，

求积分 $I=\int_C (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$.

三、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $f(a)=f(b)$，$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$.

试证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点；

2. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$ 条件收敛.

【完】