广东工业大学

2021年硕士学位研究生招生考试试题

考试科目（代码）名称：(602)数学分析　　满分 150 分

（考生注意：请在答题纸答题区域作答，否则答题无效。答卷封面需填写自己的准考证编号，答完后连同本试题一并交回！）

一. 填空题(每小题 5 分,共 45 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{2x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$____________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})^{2n}=$______________.

3. $\int_{-1}^{1}\dfrac{\sin x\cos x+1}{1+x^2}dx=$____________.

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛的充分必要条件是______________.

5. $\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty} e^{x^2+y^2}dy=$_____________.

6. $f(x,y,z)=2x+y^2+z^3$ 在点 $(0,1,1)$ 处沿方向 $l=(1,1,1)$ 的方向导数是______________.

7. $\int_L(\mathrm{x}+y)ds=$____________，L 为曲线段 $y=2x\ (0\le x\le 1)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}4^n x^{2n}$ 的收敛区间是_______________.

9. $\int_L(1+x^2)dx+ydy=$____________，其中 $L:\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$，起点 $t=0$，终点 $t=\pi$.

二. 计算题(每小题 10 分,共 50 分)

1. 设 $w(x,y)=f(xy,x+y,\ x-y)$，f 存在二阶连续导数，求 w_{xy}.

2. 设 f 在 $\cup(a)$ 可导，且 $f(a)\neq 0,f'(a)=0$,求 $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{f(a)})^{\frac{1}{x-a}}$.

3. 求 $\iint\limits_D x^2y^2\ln(x^2+y^2)dxdy$，其中 D 为单位圆 $\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

4. 计算$\int_L x^2 ds$，其中L是球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线.

5. 设φ在点a处连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，求$f'_-(a)$与$f'_+(a)$，问在什么条件下$f'(a)$存在？

三. 证明题(共 55 分)

1. (10 分)$\{a_n\}$为一实数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

2. (10 分)设函数f在$[0,a]$上二阶可导，且$|f''(x)|\le M$，f在$(0,a)$上取得最大值,证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

3. (15 分)设连续函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，而$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。证明$\{g(f_n(x))\}$在$[a,b]$上一致收敛于$g(f(x))$

4. (10 分)证明函数$\sin\frac{1}{x}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续，但对任意$a>0$在$[a,+\infty)$上一致连续.

5. (10 分)设$S(x)$为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$的和函数，证明：$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.