2021 年硕士研究生招生考试（初试）试题

科目代码：　601　　　　科目名称：高等数学

说明：1.本试题为招生单位自命题科目。
2.所有答案必须写在答题纸上，写在本试题单上的一律无效。
3.考生答题时不必抄题，但必须写明题号。
4.本试题共计四大题，满分 150 分。

一、单选题：（共 20 分，每小题 4 分）

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin(\pi x)}$，则函数 $f(x)$ (　　　)。

A、有无穷多个可去间断点　　　B、只有一个可去间断点

C、有两个可去间断点　　　D、有三个可去间断点

2. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则函数在 $(0,0)$ 处 (　　　)。

A、连续，偏导数存在　　　B、连续，偏导数不存在

C、不连续，偏导数存在　　　D、不连续，偏导数不存在

3. 曲面 $x^2-2y^2+z^2-xyz-4x+2z=6$ 在点 $(0,1,2)$ 处的切平面方程为(　　　)。

A、$3(x-1)+2(y-2)-3z+11=0$　　　B、$3x+2y-3z=4$

C、$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{z-2}{-3}=0$　　　D、$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$

4. 下列级数中，条件收敛的是(　　　)。

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{\sqrt{2n^3+4}}$　　　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$　　　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n2^n}$

5. 设 $y_1(x)$ 是方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的一个特解，C 为任意常数，则该方程的通解是 (　　　)。

A、$y = y_1 + e^{-\int p(x)dx}$　　B、$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)dx}$

C、$y = y_1 + e^{-\int p(x)dx} + C$　　D、$y = y_1 + e^{\int p(x)dx}$

二、填空题：（共 20 分，每小题 4 分）

1. 关于曲线$y = x^2 \ln x$在区间$\left[\frac{1}{e}, e\right]$上的一段凹凸性的正确 判断是 ＿＿＿＿＿＿。

2. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos x + x^{2021} |\sin x|\right) dx =$ ＿＿＿＿＿＿。

3. 设向量$\vec{a} = \{\lambda, -3, 2\}$与$\vec{b} = \{1, 2, -\lambda\}$垂直，则$\lambda =$ ＿＿＿＿。

4. L为圆周$x^2 + y^2 = 1$,则$\oint_L x^2 ds =$ ＿＿＿＿＿。

5. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$的收敛域是＿＿＿＿＿＿。

三、计算题：（共 90 分，每小题 10 分）

1. 求 极 限 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x(e^{3x} - 1)}$.

2. 设$y = y(x)$由方程$\cos(xy) + 2x - y = 1$所确定,求$y''(0)$.

3. 求不定积分$\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} dx$.

4. 过原点作曲线$y = \sqrt{x-1}$的切线，求该切线与曲线及x轴围成的平面图形绕x轴旋转一周所得到的旋转体的体积.

5. 求函数$z = x^2 - y^3 + 2xy + y + 2$的极值.

6. 计算二重积分$\iint_D xy^2 dxdy$，其中$D: x^2 + y^2 \le 5$，$x - 1 \ge y^2$.

7. 设 C 是正向圆周$x^2 + y^2 = 4$，求$I = \oint_C (y^3 + 3xy + 5)dx - (x^3 - 2xy + 1)dy$.

8. 求微分方程$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$在$y|_{x=0} = 1$的解.

9. 求微分方程$y'' - 4y = x + 1$的一个特解.

四、证明题：（共 20 分，每小题 10 分）

1. 设$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$有$n+1$个不同的零点,试证明$f(x)\equiv 0$.

2. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，试证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^{1+\alpha}}\ (\alpha>0)$必绝对收敛.