

昆明理工大学 2021 年硕士研究生招生入学考试试题(A 卷)

考试科目代码: 617

考试科目名称: 数学分析

考生答题须知

1. 所有题目(包括填空、选择、图表等类型题目)答题答案必须做在考点发给的答题纸上,做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
2. 评卷时不评阅本试题册,答题如有做在本试题册上而影响成绩的,后果由考生自己负责。
3. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答(画图可用铅笔),用其它笔答题不给分。
4. 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

1. (20 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, \beta]$ ($\beta > 0$) 上二阶可导, $f(0) = f(\beta) = 0$, $F(x) = x^2 f(x)$. 证明: 存在 $\theta \in (0, \beta)$, 使得 $F''(\theta) = 0$.

2. (15 分) 设 $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$ ($n \geq 1$). 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

3. (20 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

4. (15 分) 讨论无穷积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ 的敛散性.

5. (15 分) 已知 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n \ln n}}$ 收敛.

6. (15 分) 设 $F(x, y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x - yz)f(z)dz$, 其中 $f(z)$ 为可微函数, 求 $F_{xy}(x, y)$.

7. (15 分) 设 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

8. (15 分) 求曲线积分

$$\oint_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中 L 为平面 $x + y + z = 1$ 与各坐标平面的交线相互连接形成, 并取逆时针方向为正向.

9. (20 分) 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $2 \int_0^a dx \int_x^a f(x)f(y)dy = [\int_0^a f(x)dx]^2$.