昆明理工大学2021年硕士研究生招生入学考试试题(A卷)

考试科目代码： 843　　　　　　考试科目名称 ： 高等代数

考生答题须知

1. 所有题目（包括填空、选择、图表等类型题目）答题答案必须做在考点发给的答题纸上，做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
2. 评卷时不评阅本试题册，答题如有做在本试题册上而影响成绩的，后果由考生自己负责。
3. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答（画图可用铅笔），用其它笔答题不给分。
4. 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

一、填空题：（每题4分，共40分）

1、设 $f(x)=x^4-2x+5$， $g(x)=x^2-x+2$，则 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商是___________，余式是__________。

2、设5阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $\left|2A^*-4A^{-1}\right|=$__________。

3、设 $A=\begin{pmatrix}2&3&0&0\\-3&2&0&0\\0&0&2&3\\0&0&-3&2\end{pmatrix}$，则 $\left|A^2\right|=$__________。

4、已知向量组 $\vec{\alpha}_1=(1,2,-1)$，$\vec{\alpha}_2=(2,0,t)$，$\vec{\alpha}_3=(0,-4,5)$ 的秩为2，则 $t=$__________。

5、设矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，且矩阵 A 与 B 相似，则 $A-2E_3$ 的秩为_________。

6、设 W_1 是 $R^{n\times n}$ 的一个子空间，且 W_1 是由全体 n 阶实下三角矩阵构成，则 W_1 的维数等于__________。

7、设四元非齐次线性方程组 $AX=\vec{b}$ 的系数矩阵 A 的秩为3，且已知它的两个解分别为 $\vec{\eta}_1$，$\vec{\eta}_2$，则该方程组的通解为 $X=$___________.

8、设线性空间 $V=L\{f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)\}$, 其中

$f_1(x)=1+4x-2x^2+x^3$, $f_2(x)=-1+9x-3x^2+2x^3$, $f_3(x)=-5+6x+x^3$,

$f_4(x)=5+7x-5x^2+2x^3$, 则线性空间 V 的基为__________，维数是__________。

9、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&a&3\\6&-6&b\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4$, 则 $a=$__________，$b=$__________。

10、已知三阶实对称方阵A有特征值$1,1,2$且$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$是属于2的特征向量，则$A$的属于1的线性无关的特征向量是__________。

二、证明题：（每题10分，共30分）

1、证明 $f(x)=x^P+px+1$（p为素数）在有理数域上不可约。

2、证明如果A是$n\times n$矩阵$(n\geq 2)$，那么A^*的秩$r(A^*)$为

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ 0, & r(A)<n-1.\end{cases}$$

3、设$a_1,a_2,...,a_n$都是非零实数，证明

$$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & ... & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & ... & 1 & 1\\ .. & .. & .. & ... & .. & ..\\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}=a_1a_2...a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

三、（10分）设$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，设$k$为正整数，求$A^k$.

四、（10分）设

$$\vec{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T,\vec{\alpha}_2=(2,3,4,5)^T,\vec{\alpha}_3=(3,4,5,6)^T,\vec{\alpha}_4=(4,5,6,7)^T$$ 。

（1）判别向量组的线性相关性；

（2）求向量组的一个最大无关组，并用该最大无关组表示其余向量。

五、（10分）给定线性空间P^4中的两个向量为$\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,1,1)^T$. 令$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$和$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+x_2=x_3+x_4\}$.

（1）求W_1+W_2的维数和一组基；

（2）求$W_1\cap W_2$ 的维数。

六、（10分）设V为4维欧式空间，$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$为$V$的一个标准正交基，子空间$W=L(\alpha_1,\alpha_2)$，其中$\alpha_1=\gamma_1+\gamma_2,\alpha_2=\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3$，试求$W^{\perp}$。

七、（20分）P为数域，设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\in P^{3\times 3}$，对任意的$X\in P^{3\times 3}$，定义线性变换$\sigma:\sigma(X)=AX$，求值域$\mathrm{Im}\,\sigma$和核$Ker\sigma$，并分别给出它们的一组基和维数。

八、（20分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2-2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为1，特征值之积为$-12$，求

（1）a,b；

（2）利用正交变换将二次型f化为标准型，并写出对应的正交矩阵。