# 绍兴文理学院 2020 年硕士研究生入学考试初试试题（A 卷）

报考专业：基础数学、计算数学、应用数学、数学教育

考试科目：数学分析　　科目代码：651

**注意事项：本试题的答案必须写在规定的答题纸上，写在试题上不给分。**

**一、判断题（判断下列命题的对与错，对的请打“√”，错的请打“×”。每小题 3 分，共 10 小题，总计 30 分）**

1．因为当 $x \to 0$ 时，有 $\sin x \sim x, \tan x \sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

2．若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续有界，则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致连续.

3．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\cdot\left|x^3-x\right|$ 的不可导点的个数是 2 个.

5．若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 $D$ 内具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则对 $D$ 内任一光滑曲线 $L$，曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关.

6．含参量非正常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xy}{1+x^2}dx$ 关于 $y\in(-\infty,+\infty)$ 是绝对收敛但非一致收敛.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0\\ x+1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 的 $Fourier$ 展开式是 $\dfrac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\cos nx)$，则 $b_2=-1$.

8. 若二元函数 $f(x,y)$ 的累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 都存在且相等，则重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 必存在.

9. 若函数在 $z=f(x,y)$ 点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在，则 $z=f(x,y)$ 点 $(x_0,y_0)$ 处连续.

10. 若 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点，则 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点处必可导.

**二、计算题（每小题 11 分，共 8 小题，总计 88 分）**

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

2. 求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 的切平面在三个坐标轴上的截距乘积最大值.

3. 设两常数$a,b$满足$b>a>0$，计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.

4. 计算定积分$\int_0^{\pi}e^x\sin^2 xdx$.

5. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}dS$，其中$\Sigma$为以原点为中心，$a$为半径的上半球面.

6. 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

7. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的和函数$f(x)$.

8. 计算积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dV$，其中$\Omega$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围成的空间区域.

**三、证明题（每小题16分，共2小题，总计32分）**

1. 若函数$z=f(x,y)$的偏导数在点$(x_0,y_0)$的某邻域上存在，且它的两个偏导数$f_x$与$f_y$在$(x_0,y_0)$连续，则函数$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处可微.

2. 设$f'(x)$在$[0,1]$上存在，而且

$$f(1)=\frac{1}{a}\int_0^a xe^{1-x}f(x)dx,$$

其中$a\in(0,1)$. 求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi)$.