沈阳工业大学

2021 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

一、（60 分，每小题 6 分）判断对错并简述理由。

1. 设多项式 $f(x)|g(x)h(x)$，则 $f(x)|g(x)$ 或 $f(x)|h(x)$.

2. 行列式中所有元素都变号，则行列式一定变号。

3. 若向量组 A 可由向量组 B 表示，则向量组 A 的秩不超过向量组 B 的秩。

4. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&0&1\\0&4&2\end{pmatrix}$ 在初等变换下的标准形是单位阵。

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&3&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则二次型 $f=X^TAX$ 是正定的。

6. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 相似，那么 $a=3,b=1$.

7. 设 R^3 是实数域 R 上的三维线性空间，则集合

$$V=\{(x,y,z)|ax+by+cz+1=0,a,b,c\in R\}$$

是 R^3 的线性子空间。

8. 若两个矩阵相似，则它们可以看成同一线性变换在不同基下对应的矩阵。

9. 在 R^3 中，按通常内积定义，向量 $\alpha=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，$\beta=(3,\frac{1}{2},-1)$ 是正交的。

10. 设 σ 是欧氏空间 V 上的正交变换，则 σ 的特征值只能是 1 或者-1.

二、（10 分）

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上的两个一元多项式，k 是给定的正整数，证明：$f(x)|g(x)$ 的充分必要条件是 $f^k(x)|g^k(x)$.

沈阳工业大学

2021年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

三、（10分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

四、（12 分）设线性方程组$x_1-x_2=a_1,x_2-x_3=a_2,x_3-x_4=a_3,x_4-x_5=a_4,x_5-x_1=a_5$,证明：该方程组有解的充分必要条件为$\sum_{i=1}^{5}a_i=0$.

五、（9分）设A是n阶方阵，若$A^{100}=0$，证明：$E-A$是可逆矩阵，并求其逆矩阵。

六、（10分）设A是n阶实对称矩阵，且满足$A^2-2A=0$，A的秩$R(A)=m$，求$|A+2E|$.

七、（10分）设4阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，每一$\alpha_i$均为4维列向量，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求方程组$AX=\beta$的通解。

八、（10分）设向量$\alpha_1=(1,1,-2,1,4)$，$\alpha_2=(2,-1,2,2,2)$，$\alpha_3=(3,-1,2,3,4)$，$\beta_1=(4,6,-9,7,5)$，$\beta_2=(2,7,-11,5,3)$，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的子空间为$W_1$，由$\beta_1,\beta_2$生成的子空间为$W_2$，求子空间$W_1+W_2$的维数与一组基。

九、（10分）化实二次型为标准形：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

十、（9 分）证明：设V为数域P上的n维线性空间，σ为V的一个线性变换，$f(\lambda)$为σ的特征多项式，若$f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$，且$(f_1(\lambda),f_2(\lambda))=1$，则$V=V_1\oplus V_2$，其中$V_i=\operatorname{Im}f_i(\sigma)=f_i(\sigma)V,i=1,2$.